

№ 10.2

75

Расширим десятичное представление  $\frac{1}{7}$

$$\begin{array}{r}
 10 \overline{) 7} \\
 \underline{- 7} \phantom{0} \\
 0 \phantom{0} (142857) \\
 \underline{- 30} \\
 20 \\
 \underline{- 14} \\
 60 \\
 \underline{- 56} \\
 40 \\
 \underline{- 35} \\
 50 \\
 \underline{- 49} \\
 1
 \end{array}$$

У  $\frac{1}{7}$  период и 6 цифр, 2021-ую шестую цифру по остатку от

десятичная 2021 на 6	цифра	1	4	2	8	5	7
	остаток	1	2	3	4	5	0

$$\begin{array}{r}
 2021 \overline{) 6} \\
 \underline{- 18} \phantom{0} \\
 22 \\
 \underline{- 18} \\
 41 \\
 \underline{- 36} \\
 5
 \end{array}$$

Значит 2021-ая цифра это 5 (т.к. остаток от деления 5), следовательно за ней - 7.  $7 > 5$  значит число увеличилось.

№ 10.4

~~Расширим столбец в кото~~ ~~Расширим~~ ~~матрицу~~, ~~второй~~  
~~x отрицательных и y положительных чисел~~

№ 10.3

~~Ответ: нет не всегда. Если на одну~~ ~~матрицу~~ ~~выделить~~  
~~4 зуба~~ ~~по диаг~~, ~~а на другой~~ ~~b~~

Да, всегда найдём наибольшее возможное расстояние между соседними в случае, когда оно будет минимальным для вырезанных шестерней.  $\frac{13}{4} = 3$  (ост.  $\frac{1}{4}$ ), значит это расстояние равно 4. Тогда

Да, всегда.

Если вырезали 4 зуба подряд, то повернем одну из шестерней на 4 зуба, это можно сделать, т.к. между крайними вырезанными находится 8 зубьев. Также можно сделать, когда вырезали 3 зуба подряд и 1 отдельный

§ 10.4

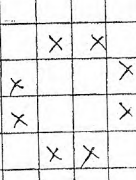
Докажем, что в строках и столбцах, ограничивающих поле всегда будут числа с разными знаками. Действительно, по какой-либо прямой мы бы не меняли знака, если в краях квадрата они разные, то в строках и столбцах образующих квадрат

Если мы будем ходить по прямой, проходящей через клетки, соединяющей разные стороны квадрата, то количество ~~изменяющихся~~ и ~~постоянных~~ либо не изменится, либо изменится на 2. Если мы будем менять знаки по прямой, ~~связывающей~~ стороны квадрата

№ 10.4

75

Докажем, что в столбце или строке в клетках не являющихся  
 углами квадрата, <sup>но ограничивающих поле,</sup> всегда будут и отрицательные и  
 положительные числа. Если изменить знаки по прямой  
 соединяющей разные стороны квадрата, то число  
~~положительных и отрицательных~~ не изменится либо  
 изменится на 2. ~~(таким образом)~~ Если ходить по прямой  
 ограничивающей квадрат, то число ~~положительных и~~  
 отрицательных также не изменится либо изменится на 2.  
 (считаем только клетки ограничивающие поле без угловых)



Таким образом число отрицательных клеток всегда  
 будет четным. А для того, чтобы все клетки  
 были одного знака оно должно быть четным

№ 10.3

Рассмотрим 4 стороны.

~~вырезаем 4 четверти зуба подряд повернем одну из четвертей  
 на 4, такое возможно сделать~~

Пусть повернуть четвертинки таким образом нельзя. Тогда  
 при сдвиге одной из четвертей на проекции всегда будет  
 меньше 13 зубов. Всего зубов за 13 поворотов на

проекции было ~~13 \* 13 = 169~~ ~~13 \* 13 - 4 \* 4 = 153~~

~~13 \* 12 - 4 \* 4 = 140~~  
 (каждый зуб  
 пересекается с границей  
 4 раза)

Если зубов всегда было ~~зубов~~ ~~зубов~~ ~~зубов~~ ~~зубов~~  
 (каждый  
 выделенной  
 пересекается с  
 границей выделенной);  
 если бы их всегда

было меньше 13, то

$$n = 10.3$$

0.5

Предполагали, что повернуть шестерёнки так возможно.

Тогда за 13 оборотов ~~шестерёнок~~ зубьев на оси было не

меньше  $13 \cdot 13 - 4 \cdot 4 = 153$ , если их все на каждом обороте

(каждый  
внешний зуб  
пересекается с  
другим внешним  
на самой оси за  
13 оборотов не все  
зубья пересекутся)

было меньше 13, то их сумма была не больше  $12 \cdot 12 + 8 = 152$ ,

считая начальный  
положение -  
1ый оборот

так как  $152 < 153$  наше предположение неверно и на одном

из оборотов было 13 зубьев.

Всероссийская олимпиада школьников 2021/2022 уч. г.  
Муниципальный этап  
Математика  
10 класс

Общее время выполнения работы — 3 часа 55 минут (235 минут).  
Максимальная сумма баллов 35.

Во время Олимпиады участники не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории; не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой. При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Задание 10.1

Докажите, что для любого простого числа  $p > 2$  числитель дроби

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-3} + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1}$$
 делится на  $p$ .

Количество баллов 7

Задание 10.2

В десятичной записи числа  $\frac{1}{7}$  зачеркнули 2021-ю цифру после запятой (а другие цифры не меняли). Как изменилось число: увеличилось или уменьшилось?

Количество баллов 7

Задание 10.3

Даны две одинаковые шестерёнки с 13 зубьями каждая. Их наложили друг на друга так, что зубья совпали (так что проекция на плоскость выглядит как одна шестерёнка). После этого четыре пары совпадающих зубьев выпилили. Всегда ли можно повернуть эти шестерёнки друг относительно друга так, чтобы проекция на плоскость выглядела как одна целая шестерёнка? (Шестерёнки можно поворачивать, но нельзя переворачивать.)

Количество баллов 7

Задание 10.4

В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены числа +1 и -1, как показано на рисунке. Разрешается одновременно менять знаки у чисел во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, можно менять знак числа в любой угловой клетке). Докажите, что, сколько бы мы ни производили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних положительных чисел.

	1	2	3	4
1	+1	+1	+1	+1
2	+1	-1	+1	+1
3	+1	+1	+1	-1
4	+1	+1	+1	+1

Количество баллов 7

Задание 10.5

Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника ABH, пересекает стороны AC и BC в точках F и G соответственно. Найдите FG, если DE = 5 см.

Количество баллов 7

в 10.2

75

20-12-06

$$\frac{1}{7} = 0,(142857)$$

$$\begin{array}{r} 2021 \overline{) 6} \\ 18 \quad \underline{) 336} \\ 22 \\ 18 \quad \underline{) 41} \\ 36 \quad \underline{) 75} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 7} \\ 7 \quad \underline{) 0,142857} \\ 30 \\ 28 \quad \underline{) 20} \\ 14 \quad \underline{) 60} \\ 56 \quad \underline{) 40} \\ 35 \quad \underline{) 50} \\ 49 \quad \underline{) 1} \end{array}$$

Тогда если будет возвращена 2021-я цифра, то 336 рядов останутся непромутованы, а судя по остатку, то с 337-й группой чисел (142857) возвращается 5-я цифра, то есть это будет число 5, то получится число 0, ... 142870, оно будет больше указательного числа, то число увеличится

Ответ: увеличилось

в 10.4

35

1) Сделаем замену первого столбца:

-1	+1	+1	+1
-1	+1	+1	+1
-1	+1	+1	+1
-1	+1	+1	+1

2) Заменяем первую строку, и также после этой замены заменим первую (вторую) строку этой строки:

-1	-1	-1	-1
-1	+1	+1	+1
-1	+1	+1	-1
-1	+1	+1	+1

3) Сделаем замену <sup>третьей</sup> первого и второго столбца:

-1	+1	+1	-1
-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	+1

4) Сделаем замену клетки, которая расположена на пересечении последней строки и последней колонки

-1	+1	+1	-1
-1	-1	-1	+1
-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1

5) После замены первой строки, также совершим замену крайних элементов её клеток

-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	+1
-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1

6) У нас осталась одна клетка +1, попробуем сделать замену по диагонали

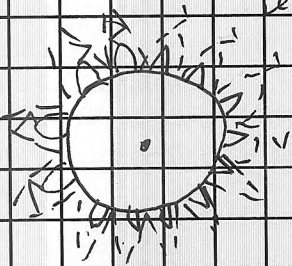
-1	-1	+1	-1
-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1

7) Попробуем сделать замену первой строки, а также крайних её клеток, тогда получим:

-1	+1	-1	-1
-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1

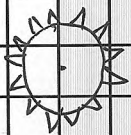
8) Вывод: после выполнения моих действий я пришла к выводу, что хотя бы одна клетка останется с отрицательным знаком от всех, тогда мы не сможем получить таблицу только с положительными знаками.

Ответ: Нет, не всегда. Проекция целой шестеренки  
 будет сохраняться в том случае, если  
 первую шестеренку не двигать, а  
 вторую повернуть на 4 зубчика, так  
 что пустоты между зубьями  
 закроются верхними (верхнюю шестеренку  
 я обозначу пунктиром)



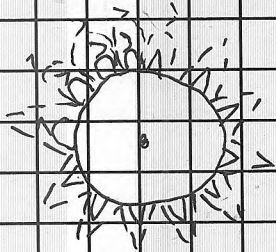
λ - я обозначила внешние  
зубчики

В проекции будет выглядеть так

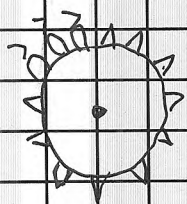


то есть как обычная шестеренка.

А если мы сдвинем верхнюю  
шестеренку только на один зубчик, а  
нижнюю шестеренку трогать не будем, то  
шестеренки будут выглядеть так  
(верхнюю шестеренку я обозначу  
пунктиром)



В проекции будет выглядеть так



Остается 3 пустых  
пространства в проекции