Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
5 класс

1. Имеются двое песочных часов: на 3 минуты и на 7 минут. Яйцо варится 11 минут. Как отмерить это время при помощи имеющихся часов?
2. Митя, Коля, Сеня, Юра и Костя пришли в музей и встали в очередь. Если бы Митя встал посередине очереди, то он оказался бы между Сеней и Костей, а если бы Митя встал в конце очереди, то рядом с ним мог быть Юра, но Митя встал впереди всех своих товарищей. Кто за кем стоит?
3. Дочери в настоящее время 8 лет, а матери 38 лет. Через сколько лет мать будет втрое старше дочери?
4. Как с помощью двух бидонов 5л и 8л отлить из молочной цистерны 7л молока? Молоко разрешается выливать обратно в цистерну.
5. Катя и Юра купили лотерейные билеты с номерами: 625517 и 322324, и обнаружили, что в каждом из номеров можно расставить знаки арифметических действий и скобки так, что в каждом случае результат будет равняться 100. Как это можно сделать?

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год

5 класс
Решение и ответы
Каждое задание оценивается в 5 баллов.

1. Перевернуть обои часы. Когда пройдет 3 минуты, в семиминутных часах останется 4 минуты. Поставить яйцо в данный момент вариться. Когда 4 минуты закончатся, перевернуть семиминутные часы обратно. Получим 4+7=11.
2. 1 решение: Митя, Толя, Сеня, Костя, Юра
   2 решение: Митя, Толя, костя, Сеня, Юра.
3. Через 7 лет.
4. 1) Налить молоко в пятилитровый бидон и перелить в восьмилитровый.
   2) Снова налить молоко в пятилитровый бидон и долить восьмилитровый бидон. Тогда в пятилитровом бидоне останется 2л молока.
   3) Вылить молоко в цистерну из восьмилитрового бидона.
   4) Перелить 2л молока из пятилитрового бидона в восьмилитровый бидон.
   5) Налить молоко в пятилитровый бидон и перелить его в восьмилитровый.
   В результате в восьмилитровом бидоне получим 2+5=7 (л) молока.
5. 62+55-17 и (3+22) · (3-2)· 4

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
6 класс

1. Разместите восемь козлят и девять гусей в пяти хлевах так, чтобы в каждом хлеве были и козлята и гуси, а число их ног равнялось 10.

2.Расшифруйте запись. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами– разные цифры.

$$\begin{array}{r} \text{УДАР} \\ +\text{УДАР} \\ \hline \text{ДРАМА} \end{array}$$

3. Разместите на трех грузовиках 7 полных бочек, 7 бочек, наполненных на половину, и 7 пустых бочек так, чтобы на грузовиках был одинаковый по массе груз.

4.В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

5.В записи 52*2* замените звездочки цифрами так, чтобы полученное число делилось на 36. Укажите все возможные варианты.

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
6 класс

Решение и ответы
Каждое задание оценивается в 5 баллов.

1. В двух хлевах по 1 козленку и 3 гусям, в трех хлевах – по 2 козленка и 1 гусю.

2. $$\begin{array}{r} 8126 \\ +8126 \\ \hline 16252 \end{array}$$

3. На первый грузовик поместить 3 полных бочки, 1 наполненную наполовину и 3 пустых бочки; на второй грузовик– 3 полных, 1 наполненную наполовину и 3 пустых; на третий – 1 полную, 5 наполненных наполовину и 1 пустую.

4.Молоко в кувшине, лимонад в бутылке, квас в банке, вода в стакане.

5.52524, 52128, 52020, 52920.

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
7 класс

1. Даны числа 1, 2, 3,4,5,6. Разрешено к любым двум из них прибавить по единице. Можно ли за несколько шагов уравнять эти числа?

2. Число 56 разложите на два слагаемых так, чтобы $\frac{1}{3}$ первого слагаемого была равна $\frac{1}{4}$ второго.

3. Из корзины яиц взяли половину всего количества яиц, потом еще половину остатка, затем половину нового остатка и, наконец, половину следующего остатка. В итоге в корзине осталось 10 яиц. Сколько яиц было в корзине первоначально?

4. Цены снижены на 20%. На сколько процентов больше можно купить товаров на ту же зарплату?

5. Какой угол образуют стрелки часов в 12 часов 20 минут?

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
7 класс

Решение и ответы
Каждое задание оценивается в 5 баллов.

1. Прибавление к числу единицы меняет его чётность. Прибавление по 1 к двум числам меняет чётность двух чисел. Если это были два чётных числа, то чётных чисел станет на два меньше, если два нечётных, то чётных станет на два больше. А если одно было чётное, а другое нечётное, то количество чётных чисел не изменится. В любом случае чётность числа чётных чисел не изменится.. Но если в шестерке все числа станут одинаковые, чётных среди них станет **0** или 6 - чётное число. Ответ. Нельзя.
2. 24+32=56
3. 160 яиц.
4. Понижение цен на 20% означает, что новая цена товара равна старой, умноженной на 0.8. Значит, на прежнюю зарплату можно купить товаров в 1,25 раз больше. Другими словами, на 25% больше.
5. В 12.00 стрелки сходятся вместе. После этого за 20 минут минутная стрелка проходит $\frac{1}{3}$ окружности, то есть описывает угол в 120^o. Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной (так как описывает круг за 12 часов). Поэтому она за 20 минут опишет угол в $120^o : 12=10^o$ и будет образовывать с минутной стрелкой угол в
$120^o - 10^o=110^o$

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
8 класс

1. Нарисуйте на плоскости пять различных прямых так, чтобы они пересекались ровно в семи различных точках.
2. Мальчик пошел с отцом в тир. Отец купил ему 10 пулек. В дальнейшем отец за каждый промах отбирал у сына одну пульку, а за каждое попадание давал одну дополнительную пульку. Сын выстрелил 55 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?
3. Квадрат числа состоит из цифр 0, 2, 3, 5. Найти его.
4. Расположите натуральные числа от 1 до 100 в строку так, чтобы разность между любыми двумя соседними числами была равна 2 или 3
5. Делится ли число 11*21*31*41*51*…*91-1 на 10? Почему?

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
8 класс

Решение и ответы
Каждое задание оценивается в 5 баллов.

1. Три возможных ответа изображены на рисунке 1

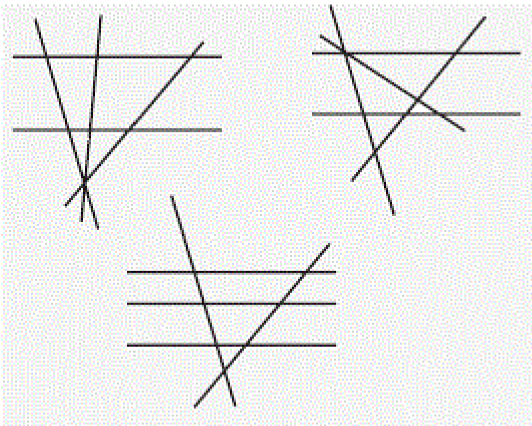

Рис. 1

2. Каждый раз, когда мальчик попадал в цель, число имеющихся у него пулек оставалось прежним (одну использовал и одну получил от отца). Каждый раз, когда мальчик промахивался, число имеющихся у него пулек уменьшалось на 2 (одну использовал и одну отобрал отец). Это значит, что сын за 55 выстрелов промахнулся 10 : 2 = 5 раз, стало быть, попал 55 – 5 = 50 раз.
3. $3025=55^2$
4. Например, так:1, 3, 5, 2, 4, 6, 8,10, 7, 9 , 11, … , 96, 98, 100,97, 99 (в каждой пятёрке порядок расположения чисел 5к+1, 5к+3, 5к+5, 5к+2, 5к+4)
5. Последняя цифра уменьшаемого оканчивается на 1, поэтому разность оканчивается 0. Значит, число делится на 10.

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
9 класс

1. На столе лежат 2005 монет. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди; за ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй – любое четное число монет от 2 до 100. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
2. Гонцу надо было пробежать 24 мили. Две трети этого расстояния он бежал со средней скоростью 8 миль в час. Сможет ли он, увеличив скорость, пробежать остаток пути так, чтобы его средняя скорость на всем пути оказалась равной 12 миль в час.
3. Четверо купцов заметили, что если они сложатся без первого, то соберут 90 рублей, без второго – 85, без третьего – 80, без четвертого – 75 рублей. Сколько у кого денег?
4. Последовательность чисел строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. Например, на втором месте стоит число 14, так как $7^2 = 49$, а $4 + 9 + 1 = 14$. На третьем месте стоит число 17 и так далее. Какое число стоит на 2008-м месте?
5. Дима взял 2008 одинаковых квадратиков. Он хочет сложить из всех этих квадратиков прямоугольник. Сколько различных прямоугольников он может получить?

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
9 класс

Решение и ответы
Каждое задание оценивается в 5 баллов.

1. Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 85 монет. Каждым следующим, если второй игрок берет x монет, то первый игрок должен взять $101 – x$ монет (он всегда может это сделать, потому что если x – четное число от 2 до 100, то $(101 – x)$ – нечетное число от 1 до 99). Так как $2005=101\cdot 19 + 85 + 1$, то через 19 таких «ответов» после хода первого на столе останется 1 монета, и второй не сможет сделать ход, т. е. проиграет.
2. Нет, не может. Для того, чтобы средняя скорость гонца, пробежавшего 24 мили, была равна 12 милям в час, необходимо, чтобы он пробежал этот путь за 2 часа. Но из условия следует, что за два часа гонец пробежал только 16 миль.
3. Всего денег у купцов (90 + 85 + 80 + 75) : 3 = 110 рублей. Поэтому у первого 110 – 90 = 20, у второго 110 – 85 = 25, у третьего 110 – 80 = 30, а четвертого 110 – 75 = 35 рублей.
4. Вычислим несколько первых членов данной последовательности: 7; 14; 17; 20; 5; 8;11;5; 8; 11; 5; … Таким образом, начиная с пятого члена последовательности, будет повторяться одна и та же тройка чисел 5, 8, 11. Так как 2008 – 4 = 2004, а 2004 кратно 3, то на 2008-м месте будет стоять число 11.
5. Ответ: 4.

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
10 класс

1. Найти натуральное число А , если из трех следующих утверждений два верны, а одно -- неверно:
а) А+51 есть точный квадрат,
б) последняя цифра числа А есть единица,
в) А-38 есть точный квадрат.
2. Расположите натуральные числа от 1 до 100 в строку так, чтобы разность между любыми двумя соседними числами была равна 2 или 3.
3. В классе не менее 95,5% и не более 96,5% учеников учатся без двоек. При каком наименьшем числе учеников это возможно?
4. Решить в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} xy + z = 94, \\ x + yz = 95. \end{cases}$$

5. Двое по очереди закрашивают клетки таблицы 8×8. одним ходом разрешается закрасить одну или несколько клеток, расположенных либо в одной строке, либо в одном столбце таблицы. Клетки закрашенные ранее, закрашивать вторично запрещается, проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
10 класс
Решение и ответы
Каждое задание оценивается в 5 баллов.

1.Как сказано в условии задачи, одно из этих утверждений является ложным. В первую очередь на себя обращает внимание условие б). Если последняя цифра равна 1, то условие а) не верно, так как нет точных квадратов оканчивающихся на 2, условие в) тоже не может быть верным, так как в этом случае последняя цифра равна 3 и таких точных квадратов нет. Следовательно, если условие б) верно, то условия а) и в) являются не верными, что не подходит по условию задачи (должно быть два верных и одно неверное утверждение из этих трех). Следовательно условие б) должно быть ложным, а а) и в) - истинными.

Теперь осталось разобраться с квадратами. В условиях а) и в) сказано, что А+51 и А-38 являются полными квадратами. Эти квадраты не обязательно могут быть соседними. Можно легко показать, что если два числа отличаются на число К, то разность их квадратов делится на это число К тоже. В нашем случае разность квадратов равна 89 и это число простое, следовательно эти числа могут отличаться только на 1 или 89. Последний вариант очевидно не подходит, а проверка первого варианта приводит к ответу А=1974.

Ответ: А=1974.

2. Например, так:1, 3, 5, 2, 4, 6, 8,10, 7, 9 , 11, … , 96, 98, 100,97, 99 (в каждой пятёрке порядок расположения чисел 5к+1, 5к+3, 5к+5, 5к+2, 5к+4)

3. Ответ: 23. Исходя из условия задачи заключаем, что хотя бы один двоечник в классе есть. Понятно, что меньше всего учеников будет в классе, где двоечник только один. Поскольку двоечников – не более 4,5% от общего числа учеников, то всего в классе не менее 1 : 0,045 =22 2⁄9 человек, т. е. не менее 23 человек. Класс из 23 учеников, среди которых ровно один двоечник, удовлетворяет условию задачи.

4. Ответ: $x = 95$, $y = 0$, $z = 94$ или $x = 31$, $y = 2$, $z = 32$.

Решение. Вычтя из второго уравнения первое, получим $(x - z)(1 - y) = 1$.
По условию, x, y, z целые, тогда возможны два случая:

1) $x – z = 1$, $1 – y = 1$, т. е. $y = 0$. Подставив значение y в систему, получим: $z =94$, $x=95$.

2) $x –z = -1$, $1 – y = - 1$, т. е. $z = x +1$, $y = 2$. Подставим найденные значения y и z в первое уравнение, получим $2x + x +1 = 94$, $x = 31$. Отсюда $z = 32$.

5. Ответ: выигрывает партнёр начинающего.

Для того чтобы победить, он должен каждым своим ходом закрашивать клетки, симметричные клеткам, закрашенным предыдущим ходом начинающего (относительно центра доски или одной из осей симметрии доски, параллельной её краям).

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
11 класс

1. Найти натуральное число А , если из трех следующих утверждений два верны, а одно -- неверно:
а) А+51 есть точный квадрат,
б) последняя цифра числа А есть единица,
в) А-38 есть точный квадрат.
2. Расположите натуральные числа от 1 до 100 в строку так, чтобы разность между любыми двумя соседними числами была равна 2 или 3.
3. В классе не менее 95,5% и не более 96,5% учеников учатся без двоек. При каком наименьшем числе учеников это возможно?
4. Решить в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} xy + z = 94, \\ x + yz = 95. \end{cases}$$

5. Двое по очереди закрашивают клетки таблицы 8 × 8. одним ходом разрешается закрасить одну или несколько клеток, расположенных либо в одной строке, либо в одном столбце таблицы. Клетки закрашенные ранее, закрашивать вторично запрещается, проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?

Школьная олимпиада по математике
2016-2017 уч. год
11 класс
Решение и ответы
Каждое задание оценивается в 5 баллов.

1. Как сказано в условии задачи, одно из этих утверждений является ложным. В первую очередь на себя обращает внимание условие б). Если последняя цифра равна 1, то условие а) не верно, так как нет точных квадратов оканчивающихся на 2, условие в) тоже не может быть верным, так как в этом случае последняя цифра равна 3 и таких точных квадратов нет. Следовательно, если условие б) верно, то условия а) и в) являются не верными, что не подходит по условию задачи (должно быть два верных и одно неверное утверждение из этих трех). Следовательно условие б) должно быть ложным, а а) и в) - истинными.

Теперь осталось разобраться с квадратами. В условиях а) и в) сказано, что А+51 и А-38 являются полными квадратами. Эти квадраты не обязательно могут быть соседними. Можно легко показать, что если два числа отличаются на число К, то разность их квадратов делится на это число К тоже. В нашем случае разность квадратов равна 89 и это число простое, следовательно эти числа могут отличаться только на 1 или 89. Последний вариант очевидно не подходит, а проверка первого варианта приводит к ответу А=1974.

Ответ: А=1974.

2. Например, так:1, 3, 5, 2, 4, 6, 8,10, 7, 9 , 11, … , 96, 98, 100,97, 99 (в каждой пятёрке порядок расположения чисел 5к+1, 5к+3, 5к+5, 5к+2, 5к+4)

3. Ответ: 23. Исходя из условия задачи заключаем, что хотя бы один двоечник в классе есть. Понятно, что меньше всего учеников будет в классе, где двоечник только один. Поскольку двоечников – не более 4,5% от общего числа учеников, то всего в классе не менее 1 : 0,045 =22 2⁄9 человек, т. е. не менее 23 человек. Класс из 23 учеников, среди которых ровно один двоечник, удовлетворяет условию задачи.

4. Ответ: $x = 95$, $y = 0$, $z = 94$ или $x = 31$, $y = 2$, $z = 32$.

Решение. Вычтя из второго уравнения первое, получим $(x - z)(1 - y) = 1$.
По условию, x, y, z целые, тогда возможны два случая:

1) $x – z = 1$, $1 – y = 1$, т. е. $y = 0$. Подставив значение y в систему, получим: $z =94$, $x=95$.

2) $x –z = -1$, $1 – y = - 1$, т. е. $z = x +1$, $y = 2$. Подставим найденные значения y и z в первое уравнение, получим $2x + x +1 = 94$, $x = 31$. Отсюда $z = 32$.

5. Ответ: выигрывает партнёр начинающего.
Для того чтобы победить, он должен каждым своим ходом закрашивать клетки, симметричные клеткам, закрашенным предыдущим ходом начинающего (относительно центра доски или одной из осей симметрии доски, параллельной её краям).